MA1 - zkouška 4. 2. 21 (dopoledne)

(1) $$\int\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} + \frac{7e^x-10}{e^{2x}-4e^x+5}\right)dx = I_1 + I_2 \quad (= I)$$

(i) existence: hledáme interval (maximální), kde je funkce, jejíž integrál máme určit, spojitá:

v I_2: integrand je spojitá funkce v R

v I_2: fce $\frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ je definovaná a spojitá, jestliže $1-\ln^2 x > 0$,

tj. $\ln^2 x < 1 \iff |\ln x| < 1 \iff -1 < \ln x < 1 \iff e^{-1} < x < e$

tj. interval, kde I existuje je (e^{-1}, e) 0,5b

(ii) $$I_1 = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ 1{,}5 \end{array} \right| = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{c} 1-t^2 = y \\ -2t\,dt = dy \\ 1{,}5b \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-\ln^2 x} + C$$

(lze „rychleji" substitucí $1-\ln^2 x = t$)

$$I_2 = \int \frac{7e^x-10}{e^{x}-4e^x+5}dx \underset{2VS}{=} \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{array} \right| = \int \frac{7t-10}{t(t^2-4t+5)}dt =$$

subst. 2b

$$= -2\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{2t-1}{t^2-4t+5}dt = -2\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{2t-4}{t^2-4t+5}dt + 3\int \frac{1}{(t-2)^2+1}dt =$$

$$= -2\ln t + \ln(t^2-4t+5) + 3\,\mathrm{arctg}(t-2) + C = (t = e^x)$$

$$= \underbrace{-2x}_{0{,}5b} + \underbrace{\ln(e^{2x}-4e^x+5)}_{2b} + \underbrace{3\,\mathrm{arctg}(e^x-2)}_{\text{vzpřel}} + C$$

rozklad: $$\frac{7t-10}{t(t^2-4t+5)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2-4t+5}, \text{ tj.}$$ rozklad 2b

$$7t-10 = A(t^2-4t+5) + Bt^2 + Ct, \text{ tj.}$$

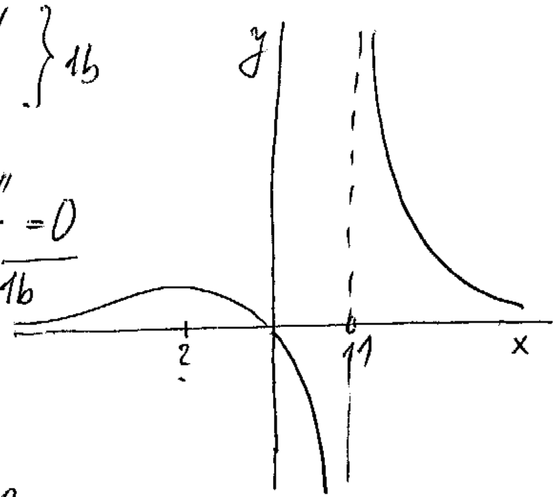
u t^2: $A + B = 0 \Rightarrow B = 2$

t: $-4A + C = 7 \Rightarrow C = 7+4A = -1$

t^0: $5A = -10 \Rightarrow A = -2$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$

„odhad" grafu



a) $\mathcal{D}f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, f je spojitá v $\mathcal{D}f$,
$f(x) = 0 \iff x = 0$, $f(x) > 0$ v $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ } 1b
$f(x) < 0$ v $(0, 1)$;

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-1} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\,1}{x^{\cancel{3}2}(1-\frac{1}{x^3})} = „\frac{1}{\infty}" = 0 \quad 1b$$

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{0\pm} = \pm\infty \quad 1b$$

b) $$f'(x) = \left(\frac{x}{x^3-1}\right)' = \frac{x^3-1-x\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = -\frac{1+2x^3}{(x^3-1)^2};$$ f' 1b výpočet

$f'(x) = 0 \iff x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$) $\Rightarrow$ v bodě $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ má f ostré lok. maximum, 0,5b

f': $+$ on $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ ↗, $-$ on $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1)$ ↘, $-$ on $(1, +\infty)$ ↘ — vyšetření (↗ ↘) 1b

globální extrémy f nemá ($\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$) 0,5b

c) $$f''(x) = -\frac{6x^2(x^3-1)^{\cancel{2}} - (1+2x^3)\,2\cancel{(x^3-1)}\cdot 3x^2}{(x^3-1)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{-6x^2\left[x^3-1-1-2x^3\right]}{(x^3-1)^3} =$$

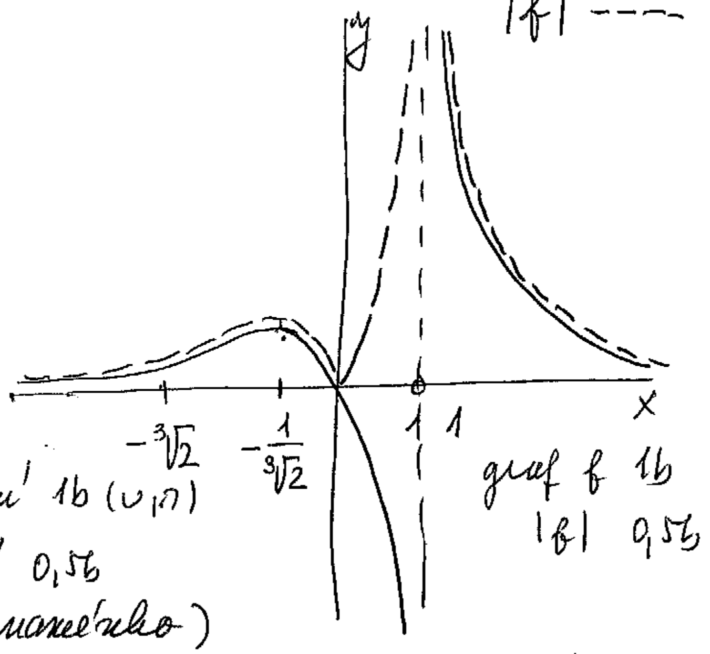
$$= \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3} \quad f'' \text{ 1,5b}$$

$f''(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = \sqrt[3]{-2}$

f'': $+$ on $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ ∪, $-$ on $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ ∩, $-$ on $(0, 1)$ ∩, $+$ on $(1, +\infty)$ ∪ — vyšetření 1b (∪, ∩)

v $x = -\sqrt[3]{2}$ je inflexe, v $x = 0$ není 0,5b
(f'' nemění znaménko)

|f| ----



graf f 1b
$|f|$ 0,5b

d) asymptoty: $x = 1$, $y = 0$ 0,5b $\quad \left(f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}},\ f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \right)$

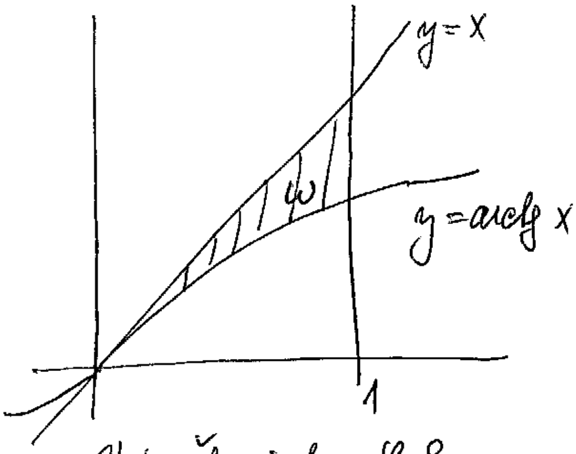
(3) $S(\omega)$, kde ω je ohraničená grafem fce $y = \operatorname{arctg} x$, a přímkami $y = x$; $x = 1$.

(i) přímka $y = x$ je tečna ke grafu fce $y = \operatorname{arctg} x$ v bodě $[0,0]$, neboť:

rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$ je (existuje-li $f'(a) \in R$): $y = f(a) + f'(a)(x-a)$;

tedy zde: $(\operatorname{arctg} x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, tedy

$y = x$ je rovnice tečny ke grafu arctg v $[0,0]$



tj. $S(\omega) = \int_0^1 (x - \operatorname{arctg} x)\,dx =$

$= \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}\right)$

$\left(\cong \frac{1}{2}(1{,}7 - 1{,}57) > 0\right)$

„model" celkem 3b – vzorec 1b, dosazení 2b (0,5b + $y=x$ je tečna ke grafu)

Výpočet integrálů:

$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ 0,5b

$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx \underset{PP}{=} \left| \begin{array}{l} u' = 1,\ u = x \\ v = \operatorname{arctg} x,\ v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = [x \operatorname{arctg} x]_0^1 - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

1,5b PP

$\underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x=0 \to t=1 \\ x=1 \to t=2 \end{array} \right| = [x \operatorname{arctg} x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln t]_1^2 =$

1,5b

dosazení 0,5

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

(nebo „přímo": $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

④ $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}(1-y)$: $x \in (-2,+\infty)$, $y \in R$

a) (i) $1-y=0 \iff y=1$, tj. $\underline{y(x)=1,\ x\in(-2,+\infty)}$ – stacionární řešení

1b stac. řešení

(ii) $y \neq 1$: separace

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x+2}}$$ separace 1b (bez $y \neq 1$ 0,5b)

$$-\ln|y-1| = \sqrt{x+2} + \tilde{c} \qquad \tilde{c} \in R$$ integrace 1+1b

$$\ln|y-1| = -\sqrt{x+2} - \tilde{c}, \quad -\tilde{c} = c \in R$$

1. úprava 1,5b (*) $|y-1| = e^{c} \cdot e^{-\sqrt{x+2}}$, $c \in R$

2. úprava 1,5b $y-1 = K e^{-\sqrt{x+2}}$, $K \neq 0$, $x \in (-2,+\infty)$

(i) a (ii) : $\underline{y_{ob}(x) = 1 + K e^{-\sqrt{x+2}}}$

$\underline{x \in (-2,+\infty),\ K \in R}$

odstranění absolutní hodnoty z (*):

$y-1>0 \Rightarrow |y-1| = y-1$ a

$y-1 = e^{c} e^{-\sqrt{x+2}}$;

$y-1<0 \Rightarrow |y-1| = -(y-1)$ a

$y-1 = -e^{c} \cdot e^{-\sqrt{x+2}}$,

tj. $K = e^{c}$ nebo $K = -e^{c}$

b) řešení počátečních úloh

(i) $y(0)=0$: $0 = 1 + K e^{-\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{K = -e^{\sqrt{2}}}$

$\underline{y(x) = 1 - e^{(\sqrt{2}-\sqrt{x+2})},\ x \in (-2,+\infty)}$ 0,5b

(ii) $y(0)=1$: $\underline{y(x) = 1 \text{ (stac. řešení)}}$

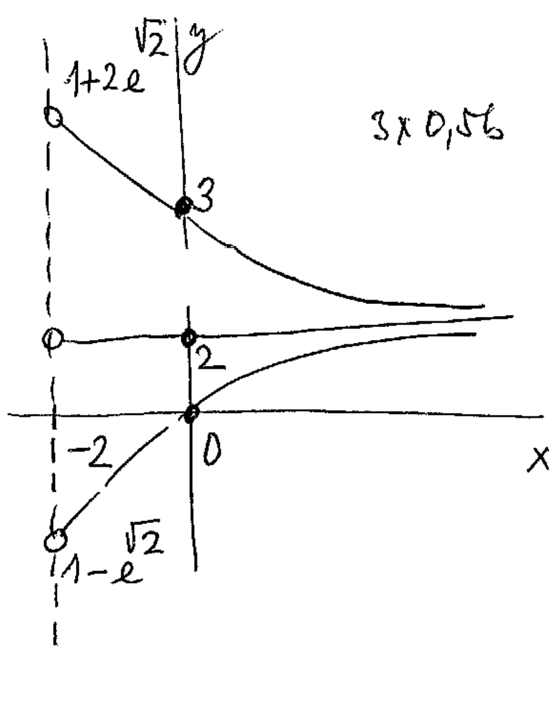
$x \in (-2,+\infty)$ 0,5b

(iii) $y(0)=3$: $3 = 1 + K e^{-\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{K = 2e^{\sqrt{2}}}$

0,5b

$\underline{y(x) = 1 + 2e^{(\sqrt{2}-\sqrt{x+2})},\ x \in (-2,+\infty)}$

($\lim\limits_{x\to -2+} y(x) = 1+K$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1$



3 x 0,5b

„Teoretické" otázky:

① b)(i) existuje B^{-1}?

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$$

2b

$\Rightarrow$ B je regulární matice, tedy existuje B^{-1} (toto lze ukázat „přímo" při výpočtu B^{-1} G.-J. metodou)

(ii) výpočet B^{-1} (Gauss-Jordan)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0+1 & -1 & & -1+2 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right), \text{ tj. } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

4b

Zkouška, tj. ? $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$

2b

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) řešení soustavy $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pomocí B^{-1}:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tj. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2b

(2) $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$:

(i) spojitost f v bodě $x_0 = 0$:

f je spojitá v bodě $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ $(=0)$, tedy :

1b formulace $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$ „$0 \cdot$ omezená" $\underset{VOS}{=} 0 \Rightarrow$ f je spojitá v bodě $x_0 = 0$ 1b závěr

$(-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ pro $x \neq 0$, pak $-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$ pro $x \neq 0$,

2b výpočet a $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = \lim\limits_{x \to 0}(-x^2) = 0 \underset{(VOS)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$)

(ii) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{VOS}{=} 0$ (= „$0 \cdot$ omezená")

1b definice výpočet 2b

(3) $f(x) = \cos(e^{2x} - 1)$

$T_2^0(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2} x^2$: 0,5b

$f(0) = \cos(1-1) = \cos 0 = 1$

$f'(0) = -\sin(e^{2x} - 1) \cdot e^{2x} \cdot 2 \Big|_{x=0} = 0$ 1b

$f''(0) = -\cos(e^{2x}-1)(e^{2x} \cdot 2)^2 - \sin(e^{2x}-1) \cdot e^{2x} \cdot 2 \cdot 2 \Big|_{x=0} = -4$

1,5b

tedy, $T_2^{f,0}(x) = 1 - 2x^2$ 3b (dosazení do „vzorce")